

Rappel: Théorème des deux gendarmes.

-64-

Soient $(a_n), (b_n), (c_n)$ trois suites, telles que

$$\left. \begin{array}{l} (1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l \\ (2) \exists k \in \mathbb{N} : \forall n \geq k, a_n \leq b_n \leq c_n \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Alors } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$$

Ex 1. Soit $a_0 = 1, a_n = \sqrt[n]{a}, a > 0 \forall n \geq 1$

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

Dém: (1) Soit $a = 1 \Rightarrow a_n = 1 \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

(2) Soit $a > 1$. $\forall x \in \mathbb{R} : (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) = x^n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow x-1 = \frac{x^n - 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1} \quad \text{Soit } x = \sqrt[n]{a} > 1$$

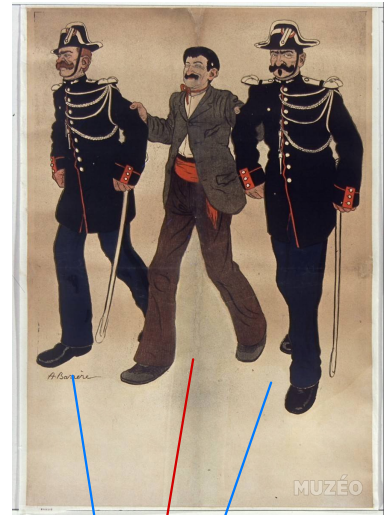
$x > 0$

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a \Rightarrow 0 < \sqrt[n]{a} - 1 = \frac{a-1}{\underbrace{a^{\frac{n-1}{n}} + a^{\frac{n-2}{n}} + \dots + a^{\frac{1}{n}} + 1}_{> n}} < \frac{a-1}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} 0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n} \downarrow 0$$

$\Rightarrow$ Par les 2 gendarmes $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{a} - 1) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

(3) Soit $0 < a < 1$ Soit $b = \frac{1}{a} > 1 \Rightarrow$ par (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b}} = 1$.



Ex 2. Suite géométrique $a_n = a_0 r^n$, $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$, $r \in \mathbb{R}$

-65-

Alors:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 r^n &= 0 \quad |r| < 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 r^n &= a_0, \quad r = 1 \\ a_n = a_0 r^n &\text{ diverge, } |r| > 1 \text{ ou } r = -1. \end{aligned}$$

Notation:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$0 \leq k \leq n; 0! = 1$$

Ex:

$$\begin{aligned} (1+x)^3 &= \binom{3}{0} + \binom{3}{1}x + \binom{3}{2}x^2 + \binom{3}{3}x^3 \\ &= 1 + 3x + 3x^2 + x^3. \end{aligned}$$

Dém: (1) Soit $r > 1 \Rightarrow r = 1 + x$, $x > 0$

$$r^n = (1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \underbrace{\binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n}_{> 0} \geq 1 + \binom{n}{1}x = 1 + nx \quad \forall n \geq 1.$$

$\forall M > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : (1+nx) > M$ (propriété d'Archimède)

$\Rightarrow |a_0 r^n| = |a_0 (1+x)^n| \geq |a_0| (1+nx) > |a_0| \cdot M \Rightarrow$ la suite n'est pas bornée $\Rightarrow$ divergente.

(2) Soit $0 < r < 1$. Soit $q = \frac{1}{r} > 1 \Rightarrow \forall M > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : q^n > M \quad \forall n \geq n_0$

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $M = \frac{|a_0|}{\varepsilon} \Rightarrow q^n > \frac{|a_0|}{\varepsilon} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{q^n} = r^n < \frac{\varepsilon}{|a_0|} \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow |a_0 r^n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$ par la déf de la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_0 r^n = 0$

(3) $r = 1 \Rightarrow a_0 r^n = a_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 r^n = a_0$.

(4) Exercice : $r < 0$: Astuce : Si $|r| > 1 \Rightarrow$ par (1) $|a_0 r^n|$ n'est pas bornée.

Si $-1 < r < 0 \Rightarrow$ Soit $q = -r \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 q^n = 0$ par (2) $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{a_0 (-1)^n}_{\text{bornée}} \underbrace{q^n}_{\rightarrow 0} = 0$.

Remarque 3 p. 68.



Ex 3. $a_n = \frac{5^n}{n!} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Dém: Soit $n > 6$; $a_n = \underbrace{\frac{5}{1} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{5}}_M \cdot \underbrace{\frac{5}{6}}_{< \frac{5}{6}} \cdot \underbrace{\frac{5}{7}}_{< \frac{5}{6}} \cdots \underbrace{\frac{5}{n}}_{< \frac{5}{6}} < M \left(\frac{5}{6}\right)^{n-5} = \underbrace{M \left(\frac{6}{5}\right)^5}_{\text{const}} \left(\frac{5}{6}\right)^n \quad \forall n > 6$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M \left(\frac{6}{5}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^n = M \left(\frac{6}{5}\right)^5 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0.$$

← suite géométrique, $r = \left(\frac{5}{6}\right) < 1$

$$0 \leq \frac{5^n}{n!} \leq M \left(\frac{6}{5}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^n \quad \forall n > 6$$

$$\begin{array}{c} n \rightarrow \infty \\ \downarrow \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} n \rightarrow \infty \\ \downarrow \\ 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Par les 2 gendarmes $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{n!} = 0$

D'une façon similaire $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000000^n}{n!} = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S^n}{n!} = 0 \quad \forall S \in \mathbb{R}$$

Calcul des limites.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$ pour tout $p > 0$.

2. Soient $x_n = a_p n^p + \dots + a_0$ et $y_n = b_q n^q + \dots + b_0$ deux suite polynômiales telles que $a_p > 0, b_q > 0$. Alors:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) &= 0, & \text{si } p < q \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) &= \frac{a_p}{b_q}, & \text{si } p = q \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) &= \infty, & \text{si } p > q \end{aligned}$$

 $\left(\frac{x_n}{y_n} \right)$ divergente, $p > q \rightarrow$ cours
13 octobre

cours du 18 octobre

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pour tout $a > 0$.

4. La suite géométrique $(a_0 r^n)$, $a_0, r \in \mathbb{R}$, converge vers la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_0 r^n = 0$, si $|r| < 1$, et diverge si $|r| > 1$.

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^n}{n!} = 0$ pour tout $p > 0$.

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$.

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

Série 5

cours
du 18 oct

Remarques. (1) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |\ell|$

(Exercice : $||x_n| - |\ell|| \leq |x_n - \ell|$, voir [DZ §1.4.4])

(2) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ($0 \leq |x_n| \leq \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon \leq x_n \leq \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$)

(2^a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \ell \neq 0 \not\Rightarrow$ convergence de (x_n) : Ex: $(-1)^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n| = 1$
mais $(-1)^n$ diverge.

(3) Si (a_n) est bornée et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$

Dém: $|a_n| < M \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq |a_n b_n| \leq M \cdot |b_n|$
bornée $\downarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 0$
 $\downarrow$
 0

$\Rightarrow$ Par les 2 gendarmes $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n b_n| = 0 \Rightarrow$ Par (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$. □

Théorème Critère de D'Alembert

Soit (a_n) une suite telle que $a_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

et $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \geq 0$

Alors Si $\rho < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Si $\rho > 1 \Rightarrow (a_n)$ diverge.

Dém: Soit $\rho < 1$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho < 1 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \rho + \varepsilon < 1$ choix de $\varepsilon > 0, \rho < 1$.

$$\Rightarrow \text{Soit } m > n_0 \Rightarrow \underbrace{\left| \frac{a_m}{a_{m-1}} \right| \left| \frac{a_{m-1}}{a_{m-2}} \right| \cdots \left| \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \right|}_{\substack{\leq \rho + \varepsilon \\ \leq \rho + \varepsilon \\ \leq \rho + \varepsilon}} \leq (\rho + \varepsilon)^{m-n_0} \\ = \left| \frac{a_m}{a_{n_0}} \right| \Rightarrow |a_m| \leq (\rho + \varepsilon)^{m-n_0} |a_{n_0}| \quad \forall m > n_0$$

$$\Rightarrow 0 \leq |a_m| \leq |a_{n_0}| (\rho + \varepsilon)^{m-n_0} \quad \forall m > n_0$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $m \rightarrow \infty \quad 0 \quad m \rightarrow \infty$ suite géométrique $\lim_{m \rightarrow \infty} (\rho + \varepsilon)^{m-n_0} |a_{n_0}| = 0$
puisque $0 < \rho + \varepsilon < 1$.

$$\Rightarrow \text{par les 2 gendarmes, } \lim_{m \rightarrow \infty} |a_m| = 0 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} a_m = 0.$$

Soit $\rho > 1$. $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > \rho - \varepsilon > 1$ choix de ε , puisque $\rho > 1$.

$$\Rightarrow \underbrace{\left| \frac{a_m}{a_{m-1}} \right| \left| \frac{a_{m-1}}{a_{m-2}} \right| \cdots \left| \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \right|}_{\left| \frac{a_m}{a_{n_0}} \right|} \geq (\rho - \varepsilon)^{m-n_0} \Rightarrow |a_m| > (\rho - \varepsilon)^{m-n_0} |a_{n_0}|$$

$(\rho - \varepsilon) > 1 \Rightarrow |a_m|$ n'est pas bornée $\Rightarrow (a_m)$ est divergente.

Remarque. Si $\rho = 1 \Rightarrow$ pas d'information sur la convergence de (a_n)

Ex: $a_n = n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ et (a_n) diverge; $b_n = \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$
 et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

§2.5. Limites infinies.

- 70 -

Déf On dit que (a_n) tend vers $+\infty$ si: $\forall A > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, a_n \geq A$
 $(b_n) \quad -\infty \quad b_n \leq -A$

Notation: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$

Attention: les suites (a_n) et (b_n) sont divergentes.

Propriétés (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm \infty$ et (b_n) est bornée $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \pm \infty$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ et $a_n \geq b_n$ $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$
 $-\infty$ et $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq n_0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ "règle d'un gendarme"

(4) (a_n) bornée et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \pm \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ (Dém: $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \Rightarrow \forall M \exists n_0 : \forall n \geq n_0$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty$ $a_n \neq 0 \quad \forall n \Rightarrow$ alors (a_n) diverge $\Rightarrow b_n \geq M \Rightarrow \frac{1}{b_n} \leq \frac{1}{M} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = 0$
et (a_n) est bornée $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$).

Formes indéterminées (1) $\infty - \infty$

Ex. $\sqrt{n} - \sqrt{n+2} = a_n$; $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n+2})(\sqrt{n} + \sqrt{n+2})}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} = 0$.

par contre, $b_n = n^2 - n$ est divergente: $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(n-1) = \infty$
 $\searrow \infty \quad \searrow \infty$

(2) $0 \cdot \infty$

Ex. $\frac{1}{(n+1)^2} \cdot (n+1) = \frac{1}{(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$; $\frac{1}{(n+1)} \cdot (n+1)^2 = (n+1) \xrightarrow{\text{diverge}} \infty$

$\downarrow 0$ $\downarrow \infty$ $\downarrow 0$ $\downarrow \infty$

$$\cos(n+1) = \cos n \cos 1 - \sin n \sin 1$$

$\nearrow 0$ $\nearrow 0$ $\nearrow 0$

$$\frac{1 + \cos n}{1 + n} \cdot (1 + n) = 1 + \cos n \quad \text{divergente.}$$

$\downarrow 0$ $\downarrow \infty$

Remarque. $(\cos n)$ et $(\sin n)$ sont divergentes.

$$3/2\pi < 4$$

Dém. Supposons que $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos n) = l$. L'ensemble $\{\cos n, \cos(n+1), \cos(n+2), \cos(n+3), \cos(n+4)\}$ contient des valeurs positives et négatives $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ il existe un nombre infini des valeurs positives et négatives $\Rightarrow$ la limite l , si elle existe, ne peut pas être ni négative, ni positive $\Rightarrow l = 0$. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos n)^2 = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - (\cos n)^2) = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin n)^2$ ~~$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin n)^2 = 0$~~

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\underbrace{\cos n}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\cos 1}_{\neq 0} - \sin n \cdot \underbrace{\sin 1}_{\neq 0}) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin n)^2 = 0 \Rightarrow \text{absurde.}$$

$\Rightarrow$ suites $(\sin n)$, $(\cos n)$ sont divergentes. ▣

(3) $\frac{\infty}{\infty}$ Ex quotient des polynômes.

(4) $\frac{0}{0}$ Ex $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n} = \infty$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0$

Théorème: Convergence des suites monotones.

-72-

Toute suite croissante qui est majorée converge vers son supremum.
décroissante *minorée* *infimum*

Toute suite croissante qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$ (diverge)
décroissante qui n'est pas minorée tend vers $-\infty$ (diverge)

Notation: $(a_n) \uparrow \Leftrightarrow (a_n)$ est croissante
 $(b_n) \downarrow \Leftrightarrow (b_n)$ est décroissante

Idee de dém: Soit $(a_n) \uparrow$ et majorée. Alors $\exists l = \sup \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$

$\forall \varepsilon > 0 \underbrace{\exists n_0 \in \mathbb{N} : 0 \leq l - a_{n_0} \leq \varepsilon}_{\text{déf de sup}}$. Puisque $(a_n) \uparrow \Rightarrow \forall n \geq n_0, a_n \geq a_{n_0}$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq \underbrace{l - a_n}_{\text{par déf}} \leq l - a_{n_0} \leq \varepsilon \Rightarrow \lim a_n = l.$

Soit $(a_n) \uparrow$ pas majorée $\Rightarrow \forall A > 0 \exists n_0 : a_{n_0} \geq A, (a_n) \uparrow \Rightarrow a_n \geq a_{n_0} \geq A \quad \forall n \geq n_0$
 $\Rightarrow$ par déf, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

Le cas $(a_n) \downarrow$ est similaire Voir [DZ §2.41]

